DM 5 – Analyse : corrigé

Partie A – Étude de la régularité d'une fonction f

1) Sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, la fonction f est continue comme quotient et différence de fonctions continues (cela fonctionne car ces ensembles sont des intervalles ouverts). Montrons que f est continue en 0 : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}$$

Or, comme exp est dérivable en 0, on a $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \exp'(0) = 1$. Ainsi, par quotient

$$\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1} = 1$$

Finalement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f(0)$, si bien que f est continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Par le même raisonnement que la question précédente, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - e^x x}{(e^x - 1)^2}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1 - e^x x}{(e^x-1)^2} &= \frac{x^2}{(e^x-1)^2} \times \frac{e^x - 1 - e^x x}{x^2}\\ &= \frac{x^2}{(e^x-1)^2} \times \frac{e^x - 1 - x + x - e^x x}{x^2}\\ &= f(x)^2 \times \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} + \frac{1 - e^x}{x}\right)\end{aligned}$$

Or, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, donc par composition $f(x)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1^2 = 1$. De plus, on sait que

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

et enfin,

$$\frac{1 - e^x}{x} = -\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

si bien que (par somme et produit)

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}$$

4) Par la question précédente, comme $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2}$, on a par le théorème de la limite de la dérivée que f est dérivable en 0 et vérifie $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. De plus, f' est continue en 0. Finalement, f' est continue en tout point de $\mathbb{R}$, si bien que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5) L'application u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par produit et différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ensuite, pour tout réel x,

$$u'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Justifions les limites :

- En $+\infty$: on a $1 - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Par produit et somme, on a bien $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- En $-\infty$: on a $e^x - xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 - 0$ par croissances comparées. Ainsi, par somme $u(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$.

6) Par la question précédente, on a $u(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (car u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $u(x) < u(0)$ pour $x \neq 0$), si bien que, comme $(e^x - 1)^2 > 0$, on a

$$f'(x) < 0$$

Par ailleurs, par la question 4, on a $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$. Finalement, f' est strictement négative sur sur $\mathbb{R}$.

7) Des questions précédentes, on déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Justifions les limites :

- En $-\infty$: pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $e^x - 1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$, donc par quotient $\dfrac{x}{e^x - 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

- En $+\infty$: pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x - 1} = xe^{-x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

et par croissances comparées, $xe^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ tandis que $\dfrac{1}{1 - e^{-x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Finalement, par produit, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Partie B – Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

8) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résolvons $f(\alpha) = \alpha$. On remarque immédiatement que 0 n'est pas solution. On considère donc $\alpha \neq 0$ par la suite. Alors :

$$\begin{aligned} & f(\alpha) = \alpha \\ \iff & \frac{\alpha}{e^\alpha - 1} = \alpha \\ \iff & \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 \qquad \text{car } \alpha \neq 0 \\ \iff & e^\alpha - 1 = 1 \\ \iff & e^\alpha = 2 \\ \iff & \alpha = \ln 2 \end{aligned}$$

On obtient ainsi que l'unique point fixe de f est $\alpha = \ln 2$.

9) On pose

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1 \end{aligned}$$

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de telles fonctions. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x\left(e^x - 1 - x\right) \end{aligned}$$

Or, comme $\exp : x \mapsto e^x$ est convexe, sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, i.e. $\exp(x) \geq \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$, ce qui se réécrit $e^x \geq 1 \times x + 1$. On en déduit que $g'(x) \geq 0$ (pour tout $x \geq 0$). Ainsi, g est croissante. En particulier,

$$g(x) \geq g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$$

si bien que g est positive.

10) Soit $x > 0$. Alors par la question 2),

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - e^x x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(e^x - 1 - e^x x) + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2e^x x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2e^x x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

11) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question 6), on a déjà $f'(x) < 0$. Il reste à montrer que $f'(x) \geq -\dfrac{1}{2}$. Or,

- Si $x = 0$, alors par la question 4), on a $f'(x) = f'(0) = -\dfrac{1}{2} \geq -\dfrac{1}{2}$
- Si $x \neq 0$, par la question 9, on a $g(x) \geq 0$. Ainsi

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{g(x)}{2(e^x - 1)^2} \geq 0$$

d'où $f'(x) \geq -\dfrac{1}{2}$.

12) Tout d'abord, par la question 7, on a $f \geq 0$, donc par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$. Ensuite, par la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$, donc par l'inégalité des accroissements finis, f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

13) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété est trivialement vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, alors par la question précédente et l'hypothèse de récurrence

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$. Finalement, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14) Par ce qui précède, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $u_n \to \alpha$.